Lösungen zur Klassenarbeit Nr. 3 — Mathematik Klasse 10c — 21.04.2005/Bel

1. Exponentialfunktionen haben die allgemeine Form $f(x) = b \cdot d^x$. Die Werte für b und d lassen sich aus dem Graphen ablesen: b ist gleich dem y-Wert des Schnittpunktes zwischen Graphen und y-Achse, und d erhält man, indem man den y-Wert bei $x = 1$ abliest und durch b teilt. Bei kleinen Funktionswerten für $x = 1$ (Funktionen $f_2(x)$ und $f_3(x)$) empfiehlt es sich, den y-Wert bei $x = -1$ abzulesen und b durch diesen Wert zu teilen.

   $f_1(x) = 2{,}5 \cdot 1{,}5^x$
   $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
   $f_3(x) = 0{,}2 \cdot 0{,}2^x$

2. Der Graph einer Exponentialfunktion des Typs $f(x) = b \cdot d^x$ soll durch die Punkte P und Q verlaufen.

   Bestimme jeweils den Funktionsterm.

   Gib die fehlende Koordinate von R so an, dass dieser Punkt ebenfalls auf dem Graphen liegt.

   (a) $P(0|10)$, $Q(2|14)$, $R(-2|y_R)$

   $$\left.\begin{aligned} 10 &= b \cdot d^0 \\ 14 &= b \cdot d^2 \end{aligned}\right\}$$

   $b = 10$
   $d = \sqrt{1{,}4}$
   $\approx 1{,}183$

   $f(x) = 10 \cdot \sqrt{1{,}4}^x$

   fehlende Koordinate:
   $$\begin{aligned} y_R &= f(-2) = 10 \cdot \sqrt{1{,}4}^{-2} \\ &= 7\tfrac{1}{7} \approx 7{,}143 \end{aligned}$$

   (b) $P(-3|8)$, $Q(4|0{,}0625)$, $R(x_R|2)$

   $$\left.\begin{aligned} 8 &= b \cdot d^{-3} \\ 0{,}0625 &= b \cdot d^4 \end{aligned}\right\}$$

   $d^7 = 0{,}0625 : 8 = 0{,}0078125$
   $d = \sqrt[7]{0{,}0078125} = 0{,}5$
   $8 = b \cdot 0{,}5^{-3} \quad \Rightarrow \quad b = 8 \cdot 0{,}5^3 = 1$
   $f(x) = 0{,}5^x$

   fehlende Koordinate: $2 = f(x_R) = 0{,}5^{x_R} \quad \Rightarrow \quad x_R = \log_{0{,}5} 2 = -1$

   (c) $P\left(-3|\sqrt{2}\right)$, $Q\left(2|9\sqrt{6}\right)$, $R\left(x_R|\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

   $$\left.\begin{aligned} \sqrt{2} &= b \cdot d^{-3} \\ 9\sqrt{6} &= b \cdot d^2 \end{aligned}\right\}$$

   $d^5 = 9\sqrt{6} : \sqrt{2} = 9\sqrt{3}$
   $d = \sqrt[5]{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$
   $\sqrt{2} = b \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{6}$
   $f(x) = 3\sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^x$

   fehlende Koordinate: $\frac{\sqrt{2}}{3} = f(x_R) = 3\sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{x_R} \quad \Rightarrow \quad x_R = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9\sqrt{3}} = -5$

3. Untersuche jeweils, ob es sich um exponentielles oder lineares Wachstum bzw. Abnahme handelt. Ermittle den Funktionsterm. Welcher Prozess kann weder exponentiell noch linear beschrieben werden kann?

   (a)

x	−10	−5	−1	10
f(x)	−35	−22,5	−7,5	15

   Exponentielles Wachstum kann ausgeschlossen werden wegen der negativen Funktionswerte.

   Bestimmung einer linearen Funktion aus den ersten beiden Punkten:

   $f(x) = m \cdot x + b \qquad m = \dfrac{-35 + 22{,}5}{-10 + 5} = 2{,}5$

   eingesetzt:
   $-35 = 2{,}5 \cdot (-10) + b \quad \Rightarrow \quad b = -10$

   $f(x) = 2{,}5x - 10$ Test: $f(-1) = -12{,}5 \neq -7{,}5$

   Ergebnis: Es handelt sich weder um einen linearen noch um einen exponentiellen Wachstumsprozess.

   (b)

x	2	5	10	12
f(x)	4	46	196	284

   Vermutung: Es handelt sich um exponentielles Wachstum:

   $f(x) = b \cdot d^x$

   $$\left.\begin{aligned} 4 &= b \cdot d^2 \\ 46 &= b \cdot d^5 \end{aligned}\right\}$$

   $d^3 = 11{,}5 \qquad d = \sqrt[3]{11{,}5} \approx 2{,}257$
   $4 = b \cdot \left(\sqrt[3]{11{,}5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad b = 4 : \left(\sqrt[3]{11{,}5}\right)^2 \approx 0{,}785$

   $f(x) \approx 0{,}785 \cdot 2{,}257^x$
   Test: $f(10) = 2695{,}2 \neq 196$
   Test auf lineares Wachstum:
   Steigung zwischen den ersten beiden Messwerten: $m = \dfrac{46 - 4}{5 - 2} = 14$
   dem zweiten und dritten Messwert: $m = \dfrac{196 - 46}{10 - 5} = 30 \neq 14$

Zusammenfassung: Es handelt sich weder um einen linearen noch um einen exponentiellen Wachstumsprozess.

(c)

x	-2	2	5	6
f(x)	2500	4	0,032	0,0064

Vermutung: Es handelt sich um exponentielle Abnahme:

$f(x) = b \cdot d^x$ $\qquad \left.\begin{array}{rcl} 2500 & = & b \cdot d^{-2} \\ 4 & = & b \cdot d^2 \end{array}\right\}$ $\qquad d^4 = 0,0016 \qquad d = \sqrt[4]{0,0016} = 0,2$

$4 = b \cdot 0,2^2 \quad \Rightarrow \quad b = 4 : 0,2^2 = 100$

$f(x) = 100 \cdot 0,2^x$ $\qquad$ Test: $f(5) = 100 \cdot 0,2^5 = 0,032 \quad \checkmark$

$f(6) = 100 \cdot 0,2^6 = 0,0064 \quad \checkmark$

Es handelt sich um eine exponentielle Abnahme mit $f(x) = 100 \cdot 0,2^x$.

(d)

x	-3	-1	5	10
f(x)	$-0,5$	$-1,5$	$-4,5$	-7

Exponentielles Wachstum kann ausgeschlossen werden wegen der negativen Funktionswerte.

Bestimmung einer linearen Funktion aus den ersten beiden Punkten:

$f(x) = m \cdot x + b \qquad m = \dfrac{-1,5 + 0,5}{-1 + 3} = -0,5$ $\qquad$ eingesetzt:

$-0,5 = -0,5 \cdot (-3) + b \quad \Rightarrow \quad b = -2$

$f(x) = -0,5x - 2$ $\qquad$ Test: $f(5) = -4,5 \quad \checkmark$

$f(10) = -7 \quad \checkmark$

Ergebnis: Es handelt sich um eine lineare Abnahme mit $f(x) = -0,5x - 2$.

(e)

x	-3	2	5	10
f(x)	0,000625	0,02	0,16	5,12

Vermutung: Es handelt sich um exponentielles Wachstum:

$f(x) = b \cdot d^x$ $\qquad \left.\begin{array}{rcl} 0,000625 & = & b \cdot d^{-3} \\ 0,02 & = & b \cdot d^2 \end{array}\right\}$ $\quad d^5 = 0,02 : 0,000625 = 32 \qquad d = \sqrt[5]{32} = 2$

$0,02 = b \cdot 2^2 \quad \Rightarrow \quad b = 0,005$

$f(x) = 0,005 \cdot 2^x$ $\qquad$ Test: $f(5) = 0,16 \quad \checkmark$

$f(10) = 5,12 \quad \checkmark$

Es handelt sich um exponentielles Wachstum mit $f(x) = 0,005 \cdot 2^x$

4. Berechne die Logarithmen:

(a) $\log_x \left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -2$

(b) $\log_{\sqrt{x}} x^2 = 4$

(c) $\log_{\frac{1}{x}} 1 = 0$

(d) $\log_{\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{4}$

(e) $\log_{x^6} \left(\sqrt[6]{x}\right) = \dfrac{1}{36}$

(f) $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} x^3 = -6$

(g) $\log_{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^2}}\right)$

Ansatz: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^a = x^{-\frac{2}{5}} \qquad \frac{1}{3}a = -\frac{2}{5} \qquad a = -\frac{6}{5}$

(h) $\log_{\frac{1}{x}} \left(\dfrac{x^3}{\sqrt[4]{x}}\right)$

Ansatz: $\left(x^{-1}\right)^a = x^{3-\frac{1}{4}} \qquad -a = 2\frac{3}{4} \qquad a = -2\frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$

5. Fasse jeweils zu einem Logarithmus zusammen — vereinfache gegebenenfalls:

Angewendet werden die Regeln zum Rechnen mit Logarithmen:

(a) $\log_{10} 5 + \log_{10} x - \log_{10} y = \log_{10} \dfrac{5x}{y}$

(b) $2 \log_{10} 3y - 3 \log_{10} 6x - \log_{10} 2y = \log_{10} \dfrac{(3y)^2}{(6x)^3 \cdot 2y} = \log_{10} \dfrac{y}{48x^3}$

(c) $2 \left(\log_{10}(x+2) + \log_{10}(x-2)\right) - 3 \log_{10} \left(x^2 - 4\right) = \log_{10} \dfrac{(x+2)^2 \cdot (x-2)^2}{(x^2-4)^3} = \log_{10} \dfrac{1}{x^2 - 4}$

6. Berechne x:

(a)	$\log_x 5{,}0625 = 1{,}5$	$x^{1{,}5} = 5{,}0625$	$x = 5{,}0625^{\frac{2}{3}} \approx 2{,}9483$
(b)	$\log_x 9\sqrt{3} = -5$	$x^{-5} = 9\sqrt{3}$	$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}5774$
(c)	$\log_{0{,}5} x = -5$	$x = 0{,}5^{-5} = 32$	
(d)	$\log_{32} x = \frac{1}{10}$	$x = 32^{\frac{1}{10}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$	
(e)	$\log_x(12 - x^2) = 4$	$x^4 = 12 - x^2$	
		$x^4 + x^2 - 12 = 0$	mit $z = x^2$:
		$z^2 + z - 12 = 0$	
		$z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$	$z_1 = 3 \qquad z_2 = -4$
			$x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3} \notin D$

7. Die „Sparbank“ bietet für spezielle Anlageformen eine Verzinsung von 2,8% jährlich.

   (a) Auf wie viel Euro wächst eine Kapitaleinlage von 7000 €, die für 6 Jahre fest angelegt wird?

   $$7000 \cdot 1{,}028^6 \approx 8261{,}46$$

   Das Kapital wächst auf rund 8261,46 €.

   (b) Wie viel muss jemand anlegen, um nach 12 Jahren 12 000 € ausbezahlt zu bekommen?

   $$x \cdot 1{,}028^{12} = 12\,000 \Rightarrow x = 12\,000 : 1{,}028^{12} \approx 8615{,}17$$

   Man muss 8615,17 € anlegen.

   (c) Wie lange dauert es, bis sich das Anfangskapital verdoppelt hat? (Runde auf ganze Monate.)

   $$K \cdot 1{,}028^x = 2 \cdot K \Rightarrow x = \log_{1{,}028} 2 \approx 25{,}1$$

   Es dauert etwas länger als 25 Jahre und einen Monat.

8. (a) Eine Bakterienkolonie wird mit einer desinfizierenden Lösung behandelt. Man beobachtet nach 3 Stunden, dass sich die Zahl der überlebenden Bakterien um 30% vermindert hat.
   Wie lange dauert es (unter Annahme exponentieller Abnahme der Bakterienzahl), bis nur noch 20% der ursprünglichen Bakterienzahl leben? (Runde auf ganze Minuten.)

   $$\begin{array}{lcl} b \cdot x^3 = 0{,}7 \cdot b & \Rightarrow & x = \sqrt[3]{0{,}7} \approx 0{,}8879 \\ b \cdot 0{,}8879^v = b \cdot 0{,}2 & \Rightarrow & v = \log_{0{,}8879} 0{,}2 \approx 13{,}53 \mathrel{\hat=} 13\,\text{h}\,32\,\text{min} \end{array}$$

   Es dauert etwa 13 Std. und 32 Minuten.

   (b) Ein anderes Desinfektionsmittel bewirkt ebenfalls eine exponentielle Abnahme der lebenden Bakterien. Hier sind nach $4\frac{1}{2}$ Stunden nur noch 50% der ursrünglichen Bakterien vorhanden.
   Wie lange dauert es bei diesem Mittel, bis nur noch 20% der ursprünglichen Bakterien übrig sind?

   $$\begin{array}{lcl} b \cdot x^{4{,}5} = 0{,}5 \cdot b & \Rightarrow & x = 0{,}5^{\frac{2}{9}} \approx 0{,}8572 \\ b \cdot 0{,}8572^v = b \cdot 0{,}2 & \Rightarrow & v = \log_{0{,}8572} 0{,}2 \approx 10{,}45 \mathrel{\hat=} 10\,\text{h}\,27\,\text{min} \end{array}$$

   Hier dauert es etwa 10 Std. und 27 Minuten.