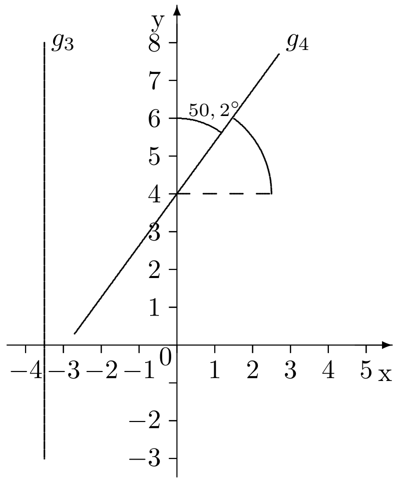
Musterlösung zur Klausur Nr. 1 — Mathematik Gk 11 — 12.09.2006/Bel

Diese Musterlösung ist mit erläuterndem Text versehen — so, wie er ähnlich auch in der Klausur aufgeschrieben sein sollte. Darüber hinaus sind Textteile enthalten, die weitere Erläuterungen z.B. bei häufig auftretenden Fehlern liefern — diese sind *kursiv* gesetzt.

1. (a) Bestimme eine Gleichung der Geraden g_1 durch die Punkte A$(-3|8)$ und B$(2|-4)$ in funktionaler Form und in Koordinatenform mit ganzzahligem a, b und c.



$g_1 : y = mx + n$ mit $m = \frac{-4-8}{2-(-3)} = -\frac{12}{5} = -2,4$

berechnetes m und Koordinaten von B eingesetzt in die Geradengleichung:

$-4 = -2\frac{2}{5} \cdot 2 + n \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{4}{5}$

also: $y = -2\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$

Koordinatenform mit ganzzahligen Koeffizienten: $12x + 5y = 4$ (alle Koeffizienten mit 5 multiplizieren).

(b) Bestimme eine Gleichung der Geraden g_2, die durch den Punkt C$(-5|-2)$ geht und mit der x-Achse einen Winkel von $114,44°$ einschließt.

$g_2 : y = mx + n$ mit $m = \tan(114,44°) \approx -2,2$

berechnetes m und Koordinaten von C eingesetzt in die Geradengleichung:

$-2 = -2,2 \cdot (-5) + n \qquad \Rightarrow \qquad n = -13$

also: $y = -2,2x - 13$

(c) Bestimme eine Gleichung zu der Geraden g_3 in der nebenstehenden Zeichnung.

$g_3 : x = -3,5$ *(Parallele zur y-Achse)*

(d) Bestimme eine Gleichung zu der Geraden g_4 in der nebenstehenden Zeichnung.

$g_4 : y = mx + n$ mit $n = 4$ *(abgelesen aus der Zeichnung)* und
Steigungswinkel $\alpha = 90° - 50,2° = 39,8°$ *(in der Zeichnung ergänzt)*,
also $m = \tan(39,8°) \approx 0,83$

also: $y = 0,83x + 4$

2. (a) Bestimme eine Gleichung der Geraden h parallel zu $g_1 : \mathrm{y} = \frac{2}{3}\mathrm{x} - 2\frac{6}{7}$ durch den Punkt P$(-6|4)$.

h hat die gleiche Steigung wie g_1 und verläuft durch den Punkt P, d.h. man setzt die entsprechenden Werte in die Grundform der Geradengleichung ein:

$h : y = mx + n$ mit $m = \frac{2}{3}$ und $4 = \frac{2}{3} \cdot (-6) + n \Rightarrow n = 8$

also: $y = \frac{2}{3}x + 8$

(b) Bestimme eine Gleichung der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{\mathrm{QR}}$ mit Q$(-6|-5,5)$ und R$(2|-0,5)$.

$s : y = mx+n$ geht durch den Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{QR}}$: M $\left(\frac{-6+2}{2} \middle| \frac{-5,5+(-0,5)}{2}\right) = (-2|-3)$

Steigung von $\overline{\mathrm{QR}}$: $\frac{-0,5-(-5,5)}{2-(-6)} = \frac{5}{8}$

somit Steigung der Senkrechten dazu: $m = -\frac{8}{5} = -1,6$

M in die Geradengleichung eingesetzt liefert: $-3 = -\frac{8}{5} \cdot (-2) + n \ \Rightarrow \ n = -6\frac{1}{5}$

also: $y = -1\frac{3}{5}x - 6\frac{1}{5}$

(c) Berechne den Abstand des Punktes T$(-4|5)$ von der Geraden zu $g_2 : \mathrm{y} = 0,25\mathrm{x} + 3,40$.

Schritte der Abstandbestimmung:

Senkrechte zu g_2 durch T: $y = mx + n$ mit $m = -\frac{1}{0,25} = -4$

$5 = -4 \cdot (-4) + n \ \Rightarrow \ n = -11$

also $y = -4x - 11$

Schnitt der Senkrechten mit g_2:

$$\begin{aligned} 0,25x + 3,40 &= -4x - 11 \\ 4,25x &= -14,40 \\ x &= -3\tfrac{33}{85} \approx -3,39 \\ \text{eingesetzt: } y &= -4 \cdot \left(-3\tfrac{33}{85}\right) - 11 = 2\tfrac{47}{85} \approx 2,55 \end{aligned}$$

gesuchter Abstand: $\left|\overline{\mathrm{TS}}\right| = \sqrt{\left(-4 - \left(-3\frac{33}{85}\right)\right)^2 + \left(5 - 2\frac{47}{85}\right)^2} \approx 2,52$

(d) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Geraden zu
$g_3 : \mathrm{y} = -3\frac{3}{15}\mathrm{x} - 11$ und $g_4 : \mathrm{y} = 2\frac{13}{20}\mathrm{x} + 18\frac{1}{4}$?

Schnittpunktansatz durch Gleichsetzen der beiden rechten Seiten der Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} -3\tfrac{3}{15}x - 11\tfrac{1}{3} &= 2\tfrac{13}{20}x + 18\tfrac{1}{4} \\ -29\tfrac{7}{12} &= 5\tfrac{17}{20}x \\ x &= -5\tfrac{20}{351} \approx -5,06 \\ \text{eingesetzt: } y &= -3\tfrac{3}{15} \cdot \cdot \left(-5\tfrac{20}{351}\right) - 11\tfrac{1}{3} = 4\tfrac{298}{351} \approx 4,85 \end{aligned}$$

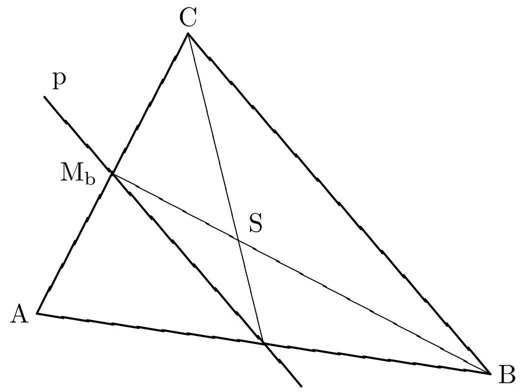
also: $\mathrm{S}(-5,06|4,85)$

Schnittwinkel *aus den Steigungen m der beiden Geradengleichungen*:

$\alpha_s = \tan^{-1}\left(-3\frac{3}{15}\right) - \tan^{-1}\left(2\frac{13}{20}\right) \approx -141,97°$;

d.h. der Schnittwinkel beträgt $141,97°$ (sowie $180° - 141,97° = 38,03°$).

3. Das Dreieck $\triangle \mathrm{ABC}$ ist definiert durch die Eckpunkte $\mathrm{A}\,(-1|1)$, $\mathrm{B}\,(9|-3)$ und $\mathrm{C}\,(1|5)$.



(a) Weise durch Berechnung nach, dass die Parallele p zu $\overline{\mathrm{BC}}$ durch den Mittelpunkt $\mathrm{M_b}$ der Seite $\overline{\mathrm{AC}}$ die Seite $\overline{\mathrm{AB}}$ halbiert.

$p||\overline{\mathrm{BC}}$ durch den Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{AC}}$:

$p : y = mx + n$ mit $m = \frac{5-(-3)}{1-9} = -1$

Mittelpunkt: $\mathrm{M_b}\left(\frac{-1+1}{2} \,\middle|\, \frac{1+5}{2}\right) = (0|3)$

eingesetzt: $3 = -1 \cdot 0 + n \;\Rightarrow\; n = 3$

$p : \quad y = -1x + 3$

Mittelpunkt der Seite $\overline{\mathrm{AB}}$:
$\mathrm{M_c}\left(\frac{-1+9}{2} \,\middle|\, \frac{1+(-3)}{2}\right) = (4|-1)$

Zum Nachweis der Behauptung werden die Koordinaten von $\mathrm{M_c}$ in die Gleichung vom p eingesetzt:
$-1 = -1 \cdot 4 + 3$ (wahr)

d.h. $\mathrm{M_c}$ liegt auf p, und damit halbiert p die Seite $\overline{\mathrm{AB}}$.

(b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Seitenhalbierenden von $\overline{\mathrm{AB}}$ und $\overline{\mathrm{AC}}$.

Korrigierte Version:

Weise nach, dass der Mittelpunkt $\mathrm{M_a}$ der Seite $\overline{\mathrm{BC}}$ auf der Geraden durch A und S liegt.

Seitenhalbierende:

$s_\mathrm{b} : y = mx{+}n$ durch B und Mb: $m = \frac{3-(-3)}{0-9} = -\frac{2}{3}$

B eingesetzt: $-3 = -\frac{2}{3} \cdot 9 + n \;\Rightarrow\; n = 3$

also: $s_\mathrm{b} : \quad y = -\frac{2}{3}x + 3$

$s_\mathrm{c} : y = mx{+}n$ durch C und Mc: $m = \frac{-1-5}{4-1} = -2$

C eingesetzt: $5 = -2 \cdot 1 + n \;\Rightarrow\; n = 7$

also: $s_\mathrm{c} : \quad y = -2x + 7$

Bestimmung des Schnittpunktes S durch Gleichsetzen der beiden rechten Gleichungsseiten:

$$\begin{aligned} -2x + 7 &= -\tfrac{2}{3}x + 3 \\ 4 &= \tfrac{4}{3}x \\ x \quad 0 &\quad 3 \qquad \text{und} \quad y = -2 \cdot 3 + 7 = 1 \quad \text{also} \quad \mathrm{S}(3|1) \end{aligned}$$

Gleichung der Gerade durch A und S:

$s_\mathrm{a} : y = mx + n$ mit $m = \frac{1-1}{3-(-1)} = 0$ also $y = n$

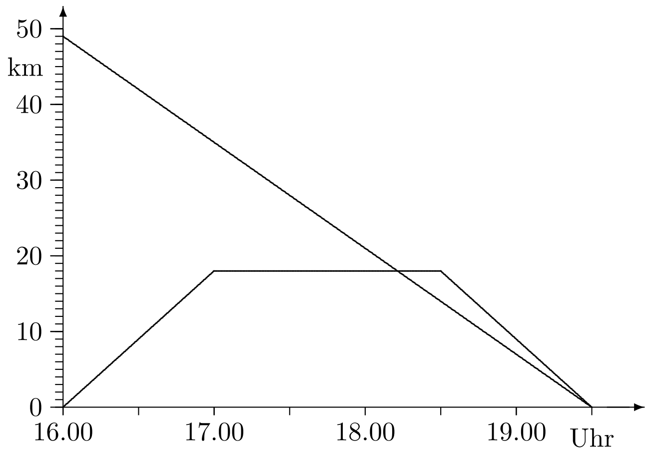
mit den Koordinaten von S eingesetzt: $n = 1$, also $s_\mathrm{a} : y = 1$

Untersuchung, ob der Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{BC}}$ auf s_a liegt (durch Einsetzen der Koordinaten):

Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{BC}}$: $\mathrm{Ma}\left(\frac{9+1}{2} \,\middle|\, \frac{-3+5}{2}\right) = (5|1)$

Ma erfüllt die Gleichung von s_a

4. Zwei Radfahrer befinden sich auf der 49 km langen Straßenstrecke von Ahausen nach Bedorf. Ihre Fahrtbewegungen werden in dem nebenstehend abgebildeten Diagramm dargestellt.



(a) Beschreibe ausführlich, welche Vorgänge in der Realität diesem Diagramm zugrunde liegen.

Bei dem Diagramm handelt es sich um ein Weg-Zeit-Diagramm, d.h. auf der y-Achse ist die Strecke / Entfernung von Ahausen abgetragen.

Veränderungen des y-Wertes bedeuten Veränderungen der Position des jeweiligen Fahrers auf dem Weg von Ahausen nach Bedorf.

Die Geschwindigkeit lässt sich aus dem Diagramm nur indirekt aus der „Steilheit“ des Graphen ablesen.

Zur Vereinfachung bietet es sich an, statt der Uhrzeiten auf der x-Achse die verstrichene Zeit seit 16.00 Uhr in Stunden zu betrachten und diese später wieder in die Uhrzeit umzurechnen.

Beide Fahrer starten gleichzeitig und treffen gleichzeitig in Behausen ein.

Fahrer 1 – startet um 16.00 Uhr in Ahausen,
– erreicht nach 1 Std. Fahrt einen Ort 18 km von Ahausen entfernt,
– macht dort bis 18.30 Uhr / $1\frac{1}{2}$ Std. Pause,
– fährt dann mit der gleichen Geschwindigkeit wie auf der Hinfahrt (in einer Stunde) nach Ahausen zurück.

Fahrer 2 – startet in Bedorf und fährt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in Richtung Ahausen,
– erreicht um 19.30 Uhr / nach $3\frac{1}{2}$ Std. Ahausen,
– fährt unterwegs an dem rastenden Fahrer 1 vorbei (ca. 18.15 Uhr).

(b) Berechne, zu welchen Zeitpunkten sich die beiden Radfahrer jeweils 10 km von Ahausen entfernt befinden.

Fahrer 1 ist zu zwei verschiedenen Zeitpunkten jeweils 10 km von Ahausen entfernt, einmal auf der Hinfahrt und einmal auf der Rückfahrt. Fahrer 2 ist gegen Ende seiner Fahrt einmal 10 km von Ahausen entfernt. Zu allen drei Fällen muss die zugehörige Gleichung für das betreffende Geradenstück bestimmt und anschließend mit 10 gleichgesetzt werden:

Fahrer 1:

Hinfahrt: $s_1(t) = \frac{18\text{ km}}{1\text{ h}} \cdot t (+0\text{ km}) = 18\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot t$

(Steigung aus den beiden Endpunkten des ersten Geradenstücks ermittelt; y-Achsenabschnitt ist 0, da es sich um eine Ursprungsgerade handelt.)

für 10 km vor Ahausen: $10\text{ km} = 18\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{10}{18}\text{ h} \mathrel{\hat{=}} 33\text{ min }20\text{ s}$

Rückfahrt: *(Steigung (Geschwindigkeit) hat den gleichen Betrag wie auf der Hinfahrt, wegen der umgekehrten Richtung aber ein negatives Vorzeichen; y-Achsenabschnitt wird aus dem Endpunkt des Geradenstücks berechnet:)*

$s_2(t) = -\frac{18\text{ km}}{1\text{ h}} \cdot t + n$ mit (Endpunkt) $0 = -18\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot 3{,}5\text{ h} + n \;\Rightarrow\; n = 63\text{ km}$

eingesetzt: $10\text{ km} = -18\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot 3{,}5\text{ h} + 63\text{ km}$

$\Rightarrow\; t = \frac{-53}{-18}\text{ h} \mathrel{\hat{=}} 2\text{ h }56\text{ min }40\text{ s}$

Fahrer 1 ist um 16.33:20 Uhr und um 18.56:40 Uhr genau 10 km von Ahausen entfernt.

Fahrer 2:

Die Geradengleichung für die Fahrt von Fahrer 2 ergibt sich aus der Steigung, berechnet aus den beiden Endpunkten des Geradenstücks (negatives Vorzeichen wegen der Richtung von Bedorf nach Ahausen), und dem abgelesenen y-Achsenabschnitt 49 (km):

$s_3(t) = -\frac{49\text{ km}}{3{,}5\text{ h}} \cdot t + 49\text{ km} = -14\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 49\text{ km}$

10 km von Ahausen entfernt: $10\text{ km} = -14\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot t + 49\text{ km} \;\Rightarrow\; t \approx 2\text{ h }47\text{ min }9\text{ s}$

Fahrer 2 ist um 18.47:09 Uhr genau 10 km von Ahausen entfernt.

(c) Berechne, zu welchem Zeitpunkt sich die beiden Radfahrer treffen.

Aus dem Diagramm ist ablesbar, dass Fahrer 2 den Fahrer 1 zum ersten Mal trifft, während dieser 18 km vor Ahausen hält. Es genügt daher, die Gleichung zu Fahrer 1 aus (b) mit dem Wert 18 gleichzusetzen. Das zweite Treffen erfolgt bei der gemeinsamen Ankunft in Ahausen um 19.30 Uhr.

$18\text{ (km)} = -14\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \cdot t + 49\text{ (km)} \;\Rightarrow\; t = 2{,}214\ldots\text{ h},$

d.h. sie treffen sich um 18.12:51 Uhr und um 19.30 Uhr.