Programmieren unter LOGO	**Arbeitsblatt Projekt Nr. 1**
Informatik Klasse 9 Diff	**31.05.2006/Bel**

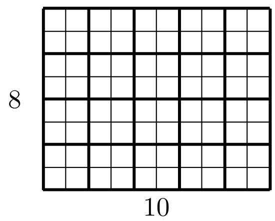
Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen mit Hilfe einer rekursiven Prozedur

Für viele Anwendungen, z.B. zum weitestmöglichen Kürzen von Brüchen, ist es erforderlich, den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von zwei ganzen Zahlen a und b zu bestimmen. Dieser ist die größte ganze Zahl, die sowohl a als auch b teilt.

Es gibt ein Verfahren zur Bestimmung des ggT, dessen Umsetzung in eine LOGO–Prozedur eine rekursive Berechnung möglich macht. Dieses Verfahren soll zunächst an einem „geometrischen“ Beispiel erläutert werden:
Man geht aus von einem Rechteck, dessen Seitenlängen genau den beiden Zahlen a und b entsprechen. Dann versucht man, dieses Rechteck mit gleichen Quadraten möglichst großer Seitenlänge auszulegen. Die Seitenlänge der größten Quadrate, mit denen dies vollständig möglich ist, ist die gesuchte Zahl ggT (a;b).

Beispiel 1:

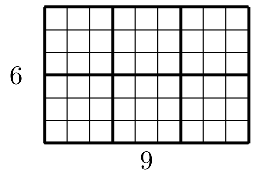
ggT (10;8)



Das größte Quadrat, mit dem man ein Rechteck mit den Seitenlängen 10 und 8 auslegen kann, hat die Seitenlänge 2.
Also ist ggT (10;8) = 2

Beispiel 2:

ggT (9;6)



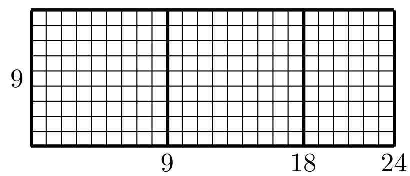
Das größte Quadrat, mit dem man ein Rechteck mit den Seitenlängen 9 und 6 auslegen kann, hat die Seitenlänge 3.
Also ist ggT (9;6) = 3

Auf der Basis dieser geometrischen Überlegungen kann man ein Verfahren zur Bestimmung des ggT entwickeln, das rekursiv angelegt ist.

Dieses Verfahren wird am Beispiel a = 24 und b = 9 erläutert:

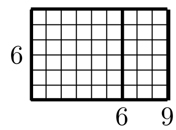
Man geht aus von einem Rechteck mit den Seitenlängen 24 und 9.
Versucht man, dieses Rechteck mit möglichst großen Quadraten auszulegen, so ist klar, dass die Seitenlänge dieser Quadrate maximal 9 sein kann.
Beim Versuch, dieses Rechteck mit Quadraten der Seitenlänge 9 zu pflastern, bleibt ein rechteckiger Rest mit den Seitenlängen 9 und 6.
6 ist dabei nichts anderes als der Rest bei der ganzzahligen Division von 24 durch 9:

6 = Rest (24;9)



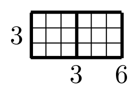
Das übrig bleibende Rechteck hat die Seitenlängen 9 und 6.
Nun versucht man, dieses Rechteck mit Quadraten der Seitenlänge 6 auszufüllen. Dabei bleibt wiederum ein rechteckiger Rest, diesmal mit den Seitenlängen 6 und 3:

3 = Rest (9;6)

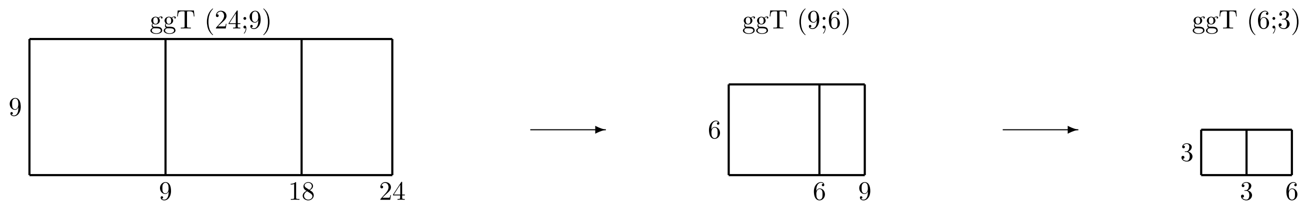


Jetzt hat das restliche Rechteck die Seitenlängen 6 und 3.
Es gelingt nun, dieses Rechteck mit Quadraten der Seitenlänge 3 vollständig auszulegen:

ggT (24;9) = 3



Zusammmenfassung des Verfahrens:



Das Rechteck mit den Seitenlängen 24 und 9 läßt sich vollständig durch Quadrate mit der Seitenlänge 3 ausfüllen.

Aus dem ausgeführten Beispiel kann man das folgende Verfahren ableiten:
(a soll die größere der beiden Zahlen a und b bezeichnen)

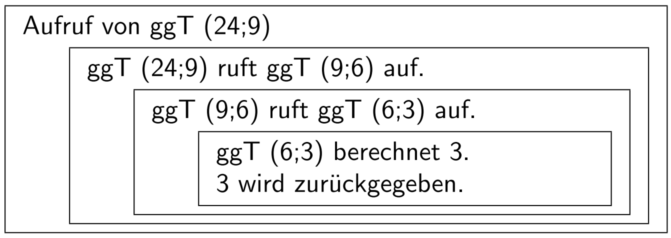
1. Wenn für den Rest bei der ganzzahligen Division von a durch b gilt: Rest (a;b) = 0, dann ist ggT (a;b) = b

   (Das Rechteck mit den Seiten a und b wird in diesem Fall völlig durch Quadrate mit der Seitenlänge b ausgelegt.)

2. Wenn die Bedingung aus 1. nicht erfüllt ist, so bestimme den ggT der Zahlen b und Rest (a;b). Es ist

$$\text{ggT}(\text{a;b}) = \text{ggT}\,(\text{b; Rest (a;b)})$$

Das hier dargestellte Verfahren kann durch das folgende Diagramm veranschaulicht werden:



Aufgaben:

1. Schreibe eine LOGO–Funktion `ggT :a :b`, die den ggT von zwei Zahlen zurückgibt. Teste diese Funktion an verschiedenen Beispielen (u.a.: zwei gleiche Zahlen; eine beliebige Zahl und 1; zwei verschiedene Primzahlen).

   Erweiterung:
   Ändere die Funtkion so, dass ohne Bedeutung ist, ob a die größere oder die kleinere der beiden eingegebenen Zahlen ist.

2. Größter gemeinsamer Teiler ggT und kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV von zwei Zahlen a und b hängen über folgende Gleichung zusammen:

$$\text{ggT}(\text{a;b}) \cdot \text{kgV}(\text{a;b}) = \text{a} \cdot \text{b}$$

   Benutze diese Gleichung, um eine Funktion `kgV :a :b` zu schreiben, die das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen a und b berechnet.

3. Schreibe eine Funktion `teilerfremd? :a :b`, die `WAHR` zurückgibt, wenn a und b teilerfremd sind.

4. Zusatzaufgabe:
   Erzeuge eine übergeordnete Prozedur `teilermenue`, die ein Menü bereitstellt, so dass nach Wunsch ggT, kgV oder Ergebnis und Rest bei einer ganzzahligen Division von zwei Zahlen a und b berechnet wird. Die Eingabe der beiden Zahlen a und b soll durch die Prozedur selbst angefordert und gesteuert werden.

5. Zusatzaufgabe:
   Erstelle eine Funktion `paare :n`, die n Paare von Zufallszahlen zwischen 1 und 1000 (einschließlich dieser beiden Zahlen) erzeugt: von jedem dieser Paare soll festgestellt werden, ob die beiden Zahlen teilerfremd sind.

   Mit m werde die Zahl der teilerfremden Paare (von den insgesamt n Paaren) bezeichnet.

   Die Funktion soll dann den Wert $\sqrt{\dfrac{6\,n}{m}}$ zurückgeben.

   Mathematiker behaupten, daß die so ermittelte Zahl ein Näherungswert für die Zahl $\pi = 3,141592654\ldots$ ist. Untersuche diese Behauptung durch einige Aufrufe der Form `DZ paare 100`.