

Projekt „Näherung zu π mit einer Monte-Carlo-Simulation“

Die Bestimmung der Fläche eines Quadrates aus der Länge a seiner Seiten ist eine einfache Aufgabe der Geometrie:

$$A_{\square} = a^2$$

Schwieriger ist die Bestimmung der Fläche eines Kreises, z.B. in Abhängigkeit von seinem Radius r . Leicht einsichtig ist lediglich, dass die Fläche eines Kreises proportional zum Quadrat seines Radius sein sollte d. h. es gibt einen Proportionalitätsfaktor (die Kreiszahl π), so dass gilt:

$$A_{\circ} = \pi \cdot r^2$$

Der Wert dieser Kreiszahl π ist nicht einfach zu bestimmen (er ist im übrigen auch keine rationale Zahl).

Es gibt verschiedene Verfahren, diesen Wert anzunähern. Im folgenden Projekt soll ein Weg eingeschlagen werden, der eine Monte-Carlo-Simulation verwendet:

Der Kreis mit dem Radius r wird in ein Quadrat eingeschlossen. Dann lässt man einen „Zufallsregen“ auf das Quadrat fallen, d.h. die Lage (Koordinaten) der einzelnen „Regentropfen“ (Punkte) werden durch den Zufallsgenerator des Programms LOGO bestimmt.

Aufgrund des Zufallsprinzips sollten die „Regentropfen“ auf der Quadratfläche gleichmäßig verteilt sein. Auch die Kreisfläche sollte gleichmäßig mit „Regentropfen“ bedeckt sein, da diese ein Teilstück der Quadratfläche ist.

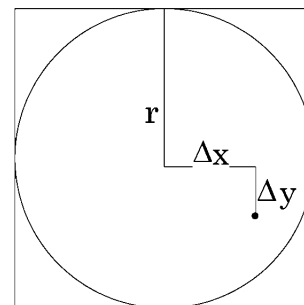
Damit ist die Zahl der „Tropfen“, die auf die Kreisfläche gefallen ist, bezogen auf die Zahl aller „Tropfen“, gleich dem Verhältnis der Kreisfläche zur Quadratfläche:

$$\frac{\text{Anzahl der Tropfen im Kreis}}{\text{Anzahl der Tropfen im Quadrat}} = \frac{A_{\circ}}{A_{\square}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2 \cdot r)^2}$$

Daraus lässt sich π berechnen.

Programmieraufgaben:
1. Darstellung von Kreis und Quadrat:

Kreis und umbeschriebenes Quadrat sollen in der Mitte des Grafikfensters von WinLOGO in angemessener Größe dargestellt werden.


2. Erzeugen eines Zufallsregens in das Quadrat:

Eine Prozedur `PR regen :radius :anzahl` soll in das gezeichnete Quadrat einen „Zufallsregen“ mit so vielen Tropfen, wie `:anzahl` angibt, fallen lassen.

Für jeden simulierten Tropfen wird ein Punkt in das Quadrat gezeichnet; die x - und die y -Koordinate dieses Punktes sind dabei per Zufallsgenerator erzeugt.

3. Bestimmung der Anzahl der Tropfen im Kreis:

Für jeden „Tropfen“ ist festzustellen, ob er in den Kreis fällt oder nicht, d.h. ob sein Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner oder größer ist als der Radius r . Dieser Abstand lässt sich mit Hilfe des Satz des Pythagoras bestimmen: er ist die Länge der Hypotenuse des Dreiecks, das durch x -Abstand Δx und y -Abstand Δy aufgespannt wird (diese beiden Abstände lassen sich durch die Unterschiede der x - bzw. y -Koordinaten des „Tropfens“ und des Kreismittelpunktes bestimmen).

4. Auswertung:

Nach der Durchführung der Simulation, die auf dem Grafik-Bildschirm dargestellt wird, soll auf dem Textbildschirm eine Ausgabe des Flächenverhältnisses zwischen Kreis und Quadrat erfolgen, das sich aus dem Anteil der „Tropfen“ im Kreis ergibt.

Weiterhin soll der sich daraus ergebende Näherungswert für die Zahl π ausgegeben werden.